INTERNATIONAL BACCALAUREATE
BACCALAURÉAT INTERNATIONAL
BACHILLERATO INTERNACIONAL

MATEMÁTICAS
NIVEL SUPERIOR
PRUEBA 2

Lunes 12 de noviembre de 2001 (mañana)

3 horas

INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- Conteste todas las cinco preguntas de la Sección A y una pregunta de la Sección B.
- A menos que se especifique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deben expresarse en forma exacta, o con tres cifras significativas, según sea más apropiado.
- Escriba la marca y el modelo de su calculadora en la portada de su cuadernillo respuestas (p.ej., Casio *fx-9750G*, Sharp EL-9600, Texas Instruments TI-85).

Se aconseja que empiece una página nueva para cada respuesta. Una respuesta correcta **sin** *indicación del método utilizado no recibirá normalmente* **ningún** *punto. Se recomienda por lo tanto que muestre sus cálculos. Cuando deba utilizar gráficas de una calculadora de pantalla gráfica para hallar soluciones, deberá dibujar esas gráficas en su respuesta.*

SECCIÓN A

Conteste las **cinco** *preguntas de esta sección.*

1. *[Puntuación máxima: 13]*

(a) Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} x + 3y - 2z &= -6 \\ 2x + y + 3z &= 7 \\ 3x - y + z &= 6 . \end{aligned}$$

[3 puntos]

(b) Halle el vector $\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}) \times (2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k})$. *[3 puntos]*

(c) Si $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$ y $\boldsymbol{u} = m\boldsymbol{a} + n\boldsymbol{b}$ siendo m y n escalares, y $\boldsymbol{u} \neq 0$, demuestre que $\boldsymbol{v}$ es perpendicular a $\boldsymbol{u}$ para todo valor de m y de n . *[3 puntos]*

(d) La recta l está contenida en el plano $3x - y + z = 6$, pasa por el punto $(1, -1, 2)$ y es perpendicular a $\boldsymbol{v}$. Halle la ecuación de l . *[4 puntos]*

2. *[Puntuación máxima: 10]*

(i) Sea $y = \operatorname{sen}(kx) - kx\cos(kx)$, siendo k una constante.

Demuestre que $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = k^2 x \operatorname{sen}(kx)$. *[3 puntos]*

(ii) Una partícula se desplaza a lo largo de una recta de modo que t segundos después de pasar por un punto fijo O de la recta, su velocidad $v(t)\ \mathrm{m\ s^{-1}}$ viene dada por $v(t) = t \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{3}t\right)$.

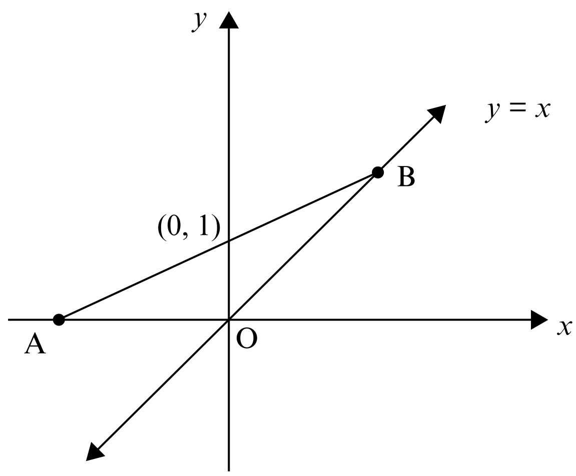
(a) Halle los valores de t para los que $v(t) = 0$, dado que $0 \le t \le 6$. *[3 puntos]*

(b) (i) Escriba una expresión matemática para la distancia **total** recorrida por la partícula en los primeros seis segundos una vez pasado O .

(ii) Halle esta distancia. *[4 puntos]*

3. *[Puntuación máxima: 13]*

El segmento de recta [AB] tiene longitud l, pendiente m, $(0 < m < 1)$, y pasa por el punto $(0, 1)$. Corta al eje Ox en A y a la recta $y = x$ en B, tal como muestra la figura.



(a) Halle las coordenadas de A y B en función de m. *[4 puntos]*

(b) Demuestre que $l^2 = \dfrac{m^2 + 1}{m^2(1 - m)^2}$. *[3 puntos]*

(c) Haga un **dibujo aproximado** de la gráfica de $y = \dfrac{x^2 + 1}{x^2(1 - x)^2}$, con $x \neq 0$, $x \neq 1$, indicando las posibles asíntotas y las coordenadas de los posibles puntos máximos o mínimos. *[4 puntos]*

(d) Halle el valor de m para el que l es mínimo, y halle este valor mínimo de l. *[2 puntos]*

4. *[Puntuación máxima: 17]*

(i) Considere la sucesión $\{a_n\} = \{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...\}$ en la que $a_1 = a_2 = 1$ y $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ para todos los enteros $n \geq 2$.

Dada la matriz $\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, use el principio de inducción matemática para demostrar que $\boldsymbol{Q}^n = \begin{pmatrix} a_{n+1} & a_n \\ a_n & a_{n-1} \end{pmatrix}$ para todos los enteros $n \geq 2$. *[7 puntos]*

(ii) (a) Exprese $z^5 - 1$ como un producto de dos factores, uno de los cuales es lineal. *[2 puntos]*

(b) Halle los ceros de $z^5 - 1$, dando sus respuestas en la forma $r(\cos\theta + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\theta)$ con $r > 0$ y $-\pi < \theta \leq \pi$. *[3 puntos]*

(c) Exprese $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$ como producto de dos factores reales cuadráticos. *[5 puntos]*

5. *[Puntuación máxima: 17]*

Dos mujeres, Ann y Bridget, juegan a un juego en el que, por turnos, lanzan un dado perfecto de seis caras. La primera mujer que saca un "6" gana el juego. Ann es la primera en lanzar el dado.

(a) Halle la probabilidad de que

(i) Bridget gane en su primer lanzamiento;

(ii) Ann gane en su segundo lanzamiento;

(iii) Ann gane en su enésimo lanzamiento. *[6 puntos]*

(b) Sea p la probabilidad de que Ann gane el juego. Demuestre que $p = \frac{1}{6} + \frac{25}{36} p$. *[4 puntos]*

(c) Halle la probabilidad de que Bridget gane el juego. *[2 puntos]*

(d) Suponga que el juego se juega seis veces. Halle la probabilidad de que Ann gane más juegos que Bridget. *[5 puntos]*

SECCIÓN B

Conteste **una** *pregunta de esta sección.*

Estadística

6. *[Puntuación máxima: 30]*

(i) Roger usa el transporte público cada mañana para ir al colegio. El tiempo que espera cada mañana el transporte se distribuye normalmente con una media de 15 minutos y una desviación típica de 3 minutos.

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que Roger espere más de 12 minutos una mañana determinada? *[3 puntos]*

(b) Durante una semana determinada (de lunes a viernes), ¿cuál es la probabilidad de que

(i) su tiempo total de espera no exceda los 65 minutos? *[3 puntos]*

(ii) espere menos de 12 minutos en al menos tres días de la semana? *[4 puntos]*

(iii) el promedio de tiempos de espera diarios sea más de 13 minutos? *[3 puntos]*

(ii) Una línea aérea está pensando en prohibir fumar en los vuelos de corta distancia, pero teme por ello perder clientes. Deciden, por tanto, introducir una política de "no fumar" por un período de prueba de seis meses.

Se eligieron muestras al azar de 200 vuelos durante los seis meses antes de la prueba y durante el período de seis meses de prueba, anotándose el número de pasajeros (n) en cada vuelo. En la siguiente tabla tenemos los resultados. (Se puede suponer que el número de pasajeros por vuelo tiene una distribución normal).

número de pasajeros (n)	$71 \le n \le 75$	$76 \le n \le 80$	$81 \le n \le 85$	$86 \le n \le 90$	$91 \le n \le 95$	$96 \le n \le 100$
número de vuelos antes de la prueba	0	15	47	52	64	22
número de vuelos durante la prueba	2	20	50	74	43	11

(a) Calcule un intervalo de confianza del 95% del promedio de la disminución de pasajeros después de la introducción de la política. *[4 puntos]*

(Esta pregunta continúa en la siguiente página)

(Pregunta 6: continuación)

(b) ¿Produce la nueva política una disminución del promedio del número de pasajeros por vuelo? Use un nivel de significación del 5%. *[3 puntos]*

(iii) En una tienda de montaje de computadoras se supone que la calidad de una pieza depende del día en que se produce. Para probar esta suposición, se elige una muestra al azar de 500 piezas, y se clasifica cada pieza según el día que se produjo y su nivel de calidad. Los datos se muestran en la tabla siguiente.

	Día en que se produce				
	Lunes	**Martes**	**Miércoles**	**Jueves**	**Viernes**
Calidad					
Superior	44	74	79	72	31
Buena	14	25	27	24	10
Media	15	20	20	23	9
Mediocre	3	5	5	0	0

Haga una prueba de significación al nivel del 5% sobre si la suposición es válida. Escriba sus suposiciones y mencione las restricciones que pueda tener que imponer a los datos. *[10 puntos]*

Conjuntos, relaciones y grupos

7. *[Puntuación máxima: 30]*

(i) (a) Demuestre que el conjunto de matrices de la forma $\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

en las que a, b, $c \in \mathbb{R}$, es grupo bajo la multiplicación de matrices. *[7 puntos]*

(b) Demuestre que este grupo es abeliano si y sólo si existe una constante real k tal que $c = ka$. *[4 puntos]*

(ii) Sea $A = \{a, b, c, d, e, f\}$, y R una relación en A definida por la matriz siguiente.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(Téngase en cuenta que "1" en la matriz significa que el elemento de la correspondiente fila se relaciona con el elemento de la correspondiente columna, por ejemplo dRb ya que existe un "1" en la intersección de la fila d y de la columna b).

(a) Suponiendo que R es transitiva, compruebe que R es una relación de equivalencia. *[3 puntos]*

(b) Exprese la partición de A correspondiente a R. *[4 puntos]*

(iii) (a) En todo grupo, demuestre que si los elementos x, y, y xy tienen orden 2, entonces $xy = yx$. *[5 puntos]*

(b) Demuestre que el simétrico de cualquier elemento de un grupo es único. *[3 puntos]*

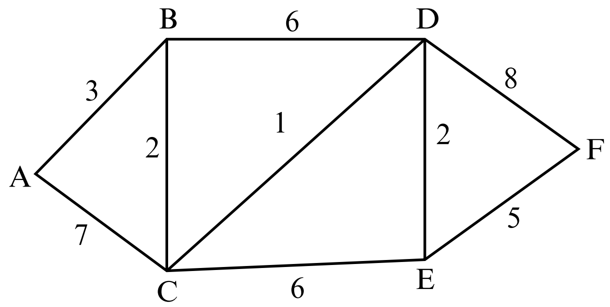
(c) Sea G un grupo. Demuestre que la correspondencia $x \leftrightarrow x^{-1}$ es un isomorfismo de G en G si y sólo si G es **abeliano**. *[4 puntos]*

Mathemáticas discretas

8. *[Puntuación máxima: 30]*

(i) Use un algoritmo de **ordenación** adecuado para ordenar $\{4, 3, 2, 5, 1, 8, 7, 6\}$ en orden ascendente. Muestre todos los pasos que usa el algoritmo. *[5 puntos]*

(ii) El siguiente diagrama muestra un grafo ponderado con vértices A , B , C , D , E y F .



Use el **Algorithmo de Dijkstra** para hallar la longitud del camino más corto entre los vértices A y F . Muestre todos los pasos usados por el algoritmo y dibuje el camino. *[6 puntos]*

(iii) Sea $a_n = pa_{n-1} + qa_{n-2}$, $n \geq 2$, una ecuación en diferencias de segundo orden con coeficientes constantes p y q .

(a) Demuestre que si r es una raiz del polinomio característico y k es una constante cualquiera, entonces $a_n = kr^n$ satisface la ecuación en diferencias dada para $n \geq 2$. *[5 puntos]*

(b) Demuestre que si b_n y c_n satisfacen ambos la ecuación en diferencias dada para $n \geq 2$, entonces $a_n = b_n + c_n$ también satisface la ecuación dada. *[4 puntos]*

(c) Use los resultados anteriores para probar que si r_1 y r_2 son los ceros del polinomio $x^2 - px - q$, siendo $r_1 \neq r_2$, entonces la solución de la ecuación en diferencias dada es

$$a_n = k_1 r_1^{\,n} + k_2 r_2^{\,n} .$$ *[4 puntos]*

(d) Resuelva la ecuación en diferencias $a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2}$, $n \geq 2$, con $a_0 = 1$, y $a_1 = 3$. *[6 puntos]*

Aproximación y análisis

9. *[Puntuación máxima: 30]*

Considere la función $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$, donde $x \in \mathbb{R}^+$.

(i) (a) Demuestre que la derivada $f'(x) = f(x)\left(\dfrac{1 - \ln x}{x^2}\right)$. *[3 puntos]*

(b) Haga un dibujo aproximado de la gráfica de $f(x)$, mostrando claramente el máximo local de la función y su asíntota horizontal. Puede usar el hecho de que $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$. *[5 puntos]*

(c) Halle el desarrollo en serie de Taylor de $f(x)$ en torno a $x = \mathrm{e}$, hasta el término de segundo grado, y demuestre que este polinomio tiene el mismo valor máximo que la misma $f(x)$. *[5 puntos]*

(ii) Determine si la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}\right)$ converge. *[4 puntos]*

(iii) Sea $g(x) = x^m (x-1)^n$, donde m y n son enteros positivos. Demuestre, usando el teorema de Rolle, que existe un número $c \in \,]0\,,\,1[$ que divide al intervalo $[0\,,\,1]$ en la razón $m : n$. *[5 puntos]*

(iv) Sea $h(x) = \mathrm{e}^{\cos x}$.

(a) Demuestre que el área A encerrada por la curva $h(x)$, el eje Ox y las rectas $x = -10\pi$ y $x = 20\pi$ es igual a $15\displaystyle\int_0^{2\pi} h(x)\mathrm{d}x$. *[2 puntos]*

(b) Halle el número de subintervalos requerido para que la regla del trapecio nos dé un error menor que 0,15 , al hallar el valor de A

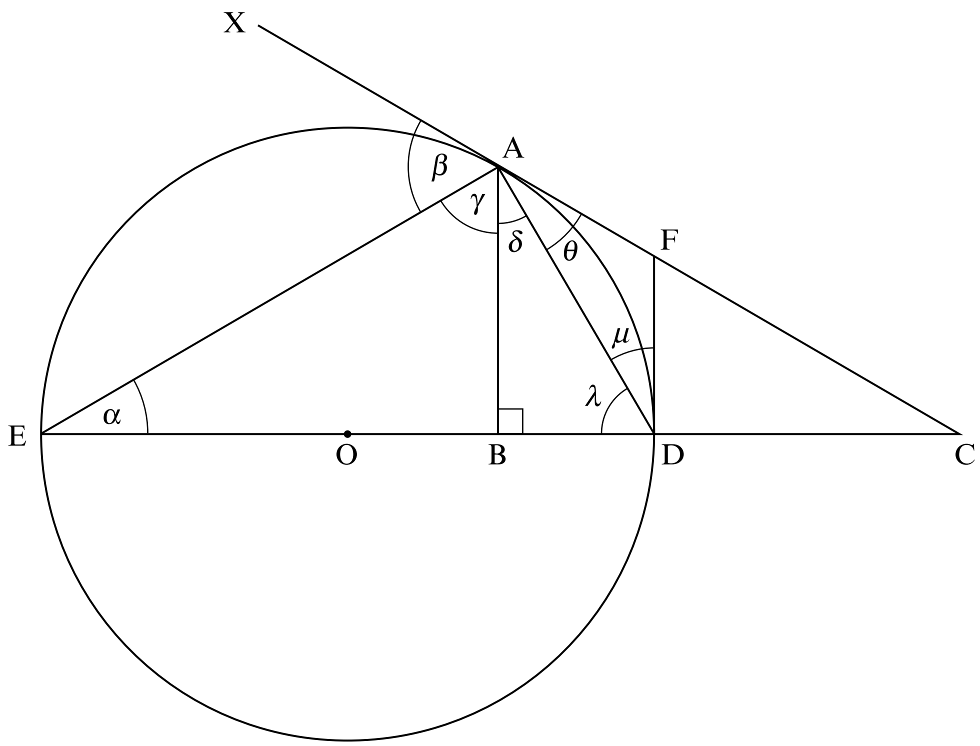
(Puede dar por supuesto que el error al calcular $\displaystyle\int_a^b h(x)\mathrm{d}x$ por la regla del trapecio con n subintervalos es de la forma

$\dfrac{(b-a)^3}{12n^2}\, h''(c)$ con $a < c < b$.) *[6 puntos]*

Geometría euclídea y secciones cónicas

10. *[Puntuación máxima: 30]*

La siguiente figura muestra un círculo de centro O y diámetro [ED] . (CAX) y (FD) son tangentes al círculo en A y D respectivamente. (AB) es perpendicular a (DE) .



Sea $\mathrm{A\widehat{E}O} = \alpha$, $\mathrm{E\widehat{A}X} = \beta$, $\mathrm{E\widehat{A}B} = \gamma$, $\mathrm{B\widehat{A}D} = \delta$, $\mathrm{D\widehat{A}F} = \theta$, $\mathrm{B\widehat{D}A} = \lambda$, $\mathrm{A\widehat{D}F} = \mu$.
Sean también, $\mathrm{BD} = p$, $\mathrm{EB} = q$, donde $q > p$.

(a) Demuestre que el triángulo AFD es isósceles. *[2 puntos]*

(b) Demuestre que

(i) (AD) es la bisectriz del ángulo BAC ;

(ii) (AE) es la bisectriz del ángulo BAX . *[6 puntos]*

(c) Demuestre que {E , D , B , C} es una cuaterna armónica. *[4 puntos]*

(d) Demuestre que $\mathrm{BC} = \dfrac{2pq}{q-p}$. *[3 puntos]*

(e) Demuestre que el círculo de diámetro [AO] es el círculo de nueve puntos del triángulo AED . *[8 puntos]*

(f) Las rectas que unen los puntos D y E con el centro del círculo de nueve puntos cortan a las rectas (AE) y (AD) en P y Q respectivamente. Demuestre que (PQ) es paralela a (DE). *[7 puntos]*